4M

УДК 517.929

В.П. Марценюк, Н.М. Гандзюк
Тернопільський державний медичний університет імені І.Я. Горбачевського, Україна
вул. Чехова, 3, м. Тернопіль, 46000, Україна

Побудова експоненціальної оцінки, як розв'язок нелінійної системи із запізненням на основі нерівності Хейла – Лунелла

V.P. Martsenyuk, N.M. Gandzyuk
I.Ya. Horbachevsky Ternopil State Medical University, Ukraine
Str. Chekhov, 3, Ternopil, 46000, Ukraine

Construction of Exponential Estimates as Solution Nonlinear System With Delays Based on Hale – Lunell Inequality

В.П. Марценюк, Н.М. Гандзюк
Тернопольский государственный медицинский университет
имени И.Я. Горбачевского, Украина
ул. Чехова, 3, г. Тернополь, 46000, Украина

Построение экспоненциальной оценки как решение нелинейной системы с запаздыванием на основе неравенства Хейла – Лунела

У даній роботі запропоновано метод побудови оцінок експоненціального типу для розв'язків нелінійних систем із запізненням. Побудова оцінок таких систем є актуальною, оскільки значна увага в галузі системних медичних досліджень звернена на вивчення задач, що описуються нелінійними системами.
Ключові слова: нелінійна система, запізнення.

In this paper proposed constructing estimates method for exponential type solutions nonlinear systems with time delay. Valuations construction of this system is actual because attention in branch of system medical research is devoted to study problems, that describe by nonlinear systems.
Key words: nonlinear system, time delay.

В данной работе предложен метод построения оценок экспоненциального типа для решений нелинейных систем с запаздыванием. Построение оценок таких систем является актуальным, поскольку значительное внимание в отрасли системных медицинских исследований обращено на изучение задач, которые описываются нелинейными системами.
Ключевые слова: нелинейная система, запаздывание.

У багатьох математичних моделях припускається, що на поведінку досліджуваної системи не впливає жодна затримка в часі, тобто майбутній стан системи не залежить від попереднього стану і визначається тільки теперішнім. У таких випадках динамічна система моделюється звичайними диференціальними рівняннями. Але при ретельному вивченні виявляється, що це лише поверхневий опис системи і реальна модель повинна включати попередні стани. Крім цього, деякі задачі повністю втрачають свою суть без розгляду «попередньої історії», зокрема в галузі системних медичних досліджень.

Отже є необхідність як у кількісних, так і якісних дослідженнях систем із запізненням. У роботі [1] отримано експоненціальну оцінку розв'язку лінійної стаціонарної системи із запізненням за допомогою функціонала Ляпунова – Красовського, для якого побудовано різницеву нерівність. Така оцінка залежить від величини запізнення.

З іншої сторони, вкрай важливим є дослідження компартментних моделей із запізненням, які мають реальні застосування у природничих науках. У роботі [2] запропоновано метод побудови експоненціальних оцінок розв'язку саме компартментних моделей, використовуючи формулу Коші. Показник експоненти є коренем квазіполінома. Крім цього, для компартментних систем перспективним є підхід на основі нерівності Хейла – Лунелла [3], що дозволяє побудову цілого класу експоненціальних оцінок.

Тому **мета даної роботи** – розвиток результатів [4] щодо застосування одного класу нелінійних систем.

Нерівність Хейла – Лунелла. Нехай $u(t)$ і $\alpha(t)$ – дійснозначні неперервні функції на $[a,b]$, $\beta(t)\ge 0$ – інтегрована на $[a,b]$ функція, такі, що

$$u(t)\le \alpha(t)+\int_a^t \beta(s)u(s)ds, \qquad a\le t\le b.$$

Тоді $u(t)\le \alpha(t)+\int_a^t \alpha(s)\beta(s)e^{\int_s^t \beta(\theta)d\theta}$, $a\le t\le b$.

Якщо $\alpha(t)$ – неспадна функція, тоді $u(t)\le \alpha(t)e^{\int_a^t \beta(\theta)d\theta}$, $a\le t\le b$.

Розглянемо невід'ємну систему:

$$\begin{aligned}&\frac{dx}{dt}=Ax(t)+f_d(x(t-\tau))\\&x(\theta)=\varphi(\theta)\end{aligned}, \tag{1}$$

де $x(t)\in R^n$, $f_d\in R^{n\times n}$ – невід'ємна матриця, $\varphi(\theta)\ge 0$, $t\in[-\tau,0]$ – покомпонентно невід'ємна функція. Тут припускаємо, що існує стала $\gamma>0$, така, що $f_d(x)\le\le \gamma x$.

Розглянемо функціонал:

$$V(x_t)=p^T x_t(0)+\int_{-\tau}^{0} p^T f_d(x_t(\theta))d\theta \ , \tag{2}$$

де $p>>0$ – покомпонентно додатній вектор із R_+^n.

Тоді, отримаємо:

$$\begin{aligned}\frac{dV(x_t)}{dt}&=p^T\frac{x(t)}{dt}+p^T f_d(x(t))-p^T f_d(x(t-\tau))=\\&=p^T(Ax(t)+f_d(x(t-\tau)))+p^T f_d(x(t))-p^T f_d(x(t-\tau))=\\&=p^T Ax(t)+p^T f_d(x(t))\le\le p^T Ax(t)+p^T\gamma x(t)=p^T(A+\gamma I)x(t)\end{aligned}, \tag{3}$$

де I – одинична матриця.

Припустимо, що існує вектор $r>>0$, такий, що:

$$p(A^T+\gamma I)+r=0. \tag{4}$$

Тоді, продовжуючи вираз (3), маємо

$$\frac{dV(x_t)}{dt}\le\le -r^T x(t). \tag{5}$$

Надалі зробимо припущення, що $r >> p$. Враховуючи невід'ємність $x(t)$, маємо:

$$\frac{dV(x_t)}{dt} \le\le -p^T x(t) = -p^T x(t) + \gamma p^T \int_{-\tau}^{0} x_t(\theta)d\theta - \gamma p^T \int_{-\tau}^{0} x_t(\theta)d\theta \le$$
$$\le -p^T x(t) + \gamma p^T \int_{-\tau}^{0} x_t(\theta)d\theta. \tag{6}$$

Помноживши останній вираз на e^t, отримаємо

$$\frac{d\left[V(x_t)e^t\right]}{dt} \le\le \gamma p^T e^t \int_{-\tau}^{0} x_t(\theta)d\theta. \tag{7}$$

Проінтегрувавши (7) на відрізку $[0;t]$, отримаємо:

$$V(x_t)e^t \le\le V(x_0) + \int_0^t \int_{-\tau}^{0} \gamma p^T e^{\theta}(x_{\theta}(s))dsd\theta. \tag{8}$$

Змінивши порядок інтегрування в нерівності (8), будемо мати:

$$L = \int_0^t \int_{-\tau}^{0} \gamma p^T e^{\theta} x_{\theta}(s)dsd\theta = \int_0^t \int_{\theta-\tau}^{\theta} \gamma p^T e^{\theta} x(s_1)ds_1 d\theta = \int_{-\tau}^{t} \int_{s1}^{s1+\tau} \gamma p^T e^{\theta} x(s_1)ds_1 d\theta =$$
$$= \int_{-\tau}^{0} \int_{s1}^{s1+\tau} \gamma p^T e^{\theta} x(s_1)ds_1 d\theta + \int_0^t \int_{s1}^{s1+\tau} \gamma p^T e^{\theta} x(s_1)ds_1 d\theta \le \qquad . \tag{9}$$
$$\le \gamma p^T\left[e^{\tau}-1\right]\int_{-\tau}^{0} x(s_1)ds_1 + \gamma p^T\left[e^{\tau}-1\right]\int_0^t e^{s1} x(s_1)ds_1$$

Об'єднавши нерівності (8) і (9), отримаємо:

$$V(x_t)e^t \le\le V(x_0) + \gamma p^T\left[e^{\tau}-1\right]\int_{-\tau}^{0} x(s_1)ds_1 + \gamma p^T\left[e^{\tau}-1\right]\int_0^t e^{s1} x(s_1)ds_1. \tag{10}$$

Виходячи із виду функціонала (2) та припущення про невід'ємність системи (1), маємо

$$V(x_t) \ge p^T x(t). \tag{11}$$

Із нерівності (10) випливає, що:

$$p^T x(t)e^t \le\le V(x_0) + \gamma p^T\left[e^{\tau}-1\right]\int_{-\tau}^{0} x(s_1)ds_1 + \gamma p^T\left[e^{\tau}-1\right]\int_0^t e^{s1} x(s_1)ds_1. \tag{12}$$

Використавши для (12) нерівність Хейла – Лунелла, де:

$$\begin{aligned} &u(t) = p^T x(t)e^t \\ &\alpha(t) = K \\ &\beta(s) = \gamma\left[e^{\tau}-1\right], \\ &a = 0 \end{aligned} \tag{13}$$

отримаємо:

$$p^T(x)e^t \le Ke^{\int_0^t \left[e^{\tau}-1\right]\gamma d\theta} = Ke^{\left[e^{\tau}-1\right]\gamma t},\ t \ge 0,$$

тобто

$$p^T(x) \le Ke^{\left(\left[e^{\tau}-1\right]\gamma-1\right)t},\ \ t \ge 0.$$

У даній роботі представлено застосування ще одного класу нелінійних систем із запізненням, а також побудовано експоненціальну оцінку їх розв'язку на основі нерівності Хейла – Лунелла.

Література

1. Марценюк В.П. Про експоненціальну оцінку розв'язку лінійної стаціонарної системи із запізненням, як розв'язок різницевого рівняння / В.П. Марценюк, Н.М. Гандзюк // Таврический весник информатики и математики. – 2012. – № 2. – С. 55-64.
2. Марценюк В.П. Метод построения оценки устойчивости в компартментной модели с запаздыванием / В.П. Марценюк, Н.М. Гандзюк // Кибернетика и системный анализ. – 2013. – № 1. – С. 96-102.
3. Wang T. Exponential stability and inequalities of solutions of abstract functional differential equations / T. Wang // J. of Mathemat. Analysis and Appl. – 2006. – Vol. 324, Issue 2. – P. 982-991.
4. Марценюк В.П. Построение экспоненциальной оценки в компартментной системе с распределенными запаздываниями: подход на основе неравенства Хейла – Лунела / В.П. Марценюк, Н.М. Гандзюк // Кибернетика и системный анализ. – 2013. – № 3. – С. 26-31.

Literatura

1. Martsenyuk V.P. The exponential solution of linear estimation of stationary systems with delay as a solution of the difference equation / V.P. Martsenyuk, N.M. Gandzyuk //Tauride Bulletin of Informatics and Mathematics. – 2012. – № 2. – С. 55-64.
2. Martsenyuk V.P. Method of construction of stability estimate for compartmental model with time delay / V.P. Martsenyuk, N.M. Gandzyuk // Cybernetics and Systems Analysis. – 2013. – № 1. – С. 96-102.
3. Wang T. Exponential stability and inequalities of solutions of abstract functional differential equations / T. Wang // J. of Mathemat. Analysis and Appl. – 2006. – Vol. 324, Issue 2. – P. 982-991.
4. Martsenyuk V.P. Construction of exponential estimates for compartmental system with distributed delays: an approach based on Hale – Lunell inequality / V.P. Martsenyuk, N.M. Gandzyuk // Cybernetics and Systems Analysis. – 2013. – № 3. – С. 26-31.

RESUME

V.P. Martsenyuk, N.M. Gandzyuk

Construction of Exponential Estimates as Solution Nonlinear System With Delays Based on Hale – Lunell Inequality

The article presents a new application of a nonlinear systems' class with delay. An exponential assessment solution of compartmental systems with delay based on inequalities of Hale-Lunella was built. Study of compartmental models with delay used in chemistry, physics and medicine are very important.

Стаття надійшла до редакції 15.04.2013.